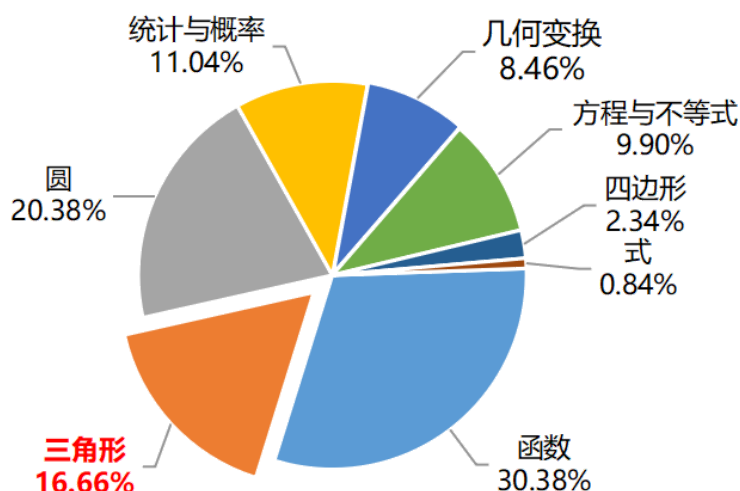


第1讲 相似三角形的性质与判定

相似三角形属于人教版教材第二十七章的内容，是期末考试的重要考察点。本模块《相似三角形》，重点包括相似三角形的判定与性质，同时也需要学生在理解判定与性质的基础上，总结相关模型的解题思路，为后续综合学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为相似三角形的性质与判定、相似三角形的基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
相似图形	★	低
平行线分线段成比例	★	低
相似三角形的判定	★★★★	高
相似三角形的性质	★★★★	高
位似图形	★★★★	中
A字模型	★★★★★	高
8字模型	★★★★★	高
子母模型与射影定理	★★★★★	高
一线三等角模型	★★★★★	高

一、相似图形

思考：观察下列几组物体的照片，你发现了什么？



【备注】引导学生分析这三组图形的异同，一图片的内容是一样的，二图片的大小是不同的。得到：①它们形状相同； ②它们的大小不等。

1. 相似图形的定义

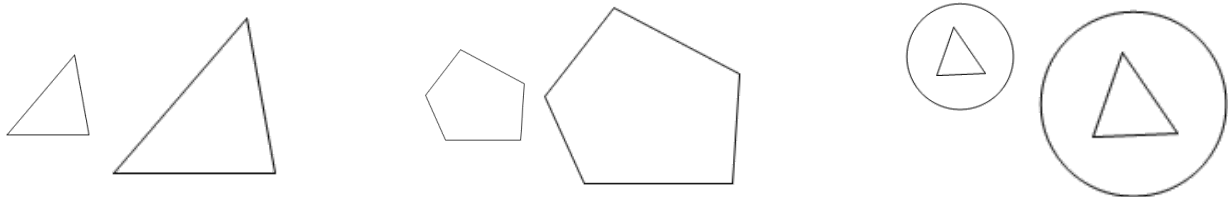
引入中的这些例子，都给我们以形状相同的形象。我们把 形状相同 的图形叫做**相似图形**。

！注意：①相似图形的大小 不一定 相同。

②形状和大小都相同的图形称为 全等 图形，全等图形是 特殊 的相似图形。

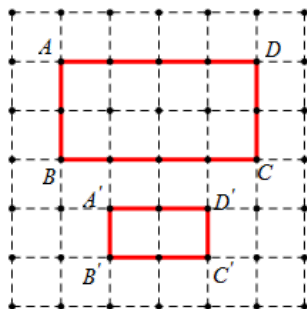
【备注】区分好全等与相似的关系：只要两个图形形状相同，就是相似图形，全等图形是特殊的相似图形。（就像等边三角形是特殊的等腰三角形）

两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形 放大 或 缩小 得到。如下图，每对图形中的两个图形相似，其中较大的图形可以看成是由较小的图形 放大 得到的，或者其中较小的图形可以看成是由较大的图形 缩小 得到。

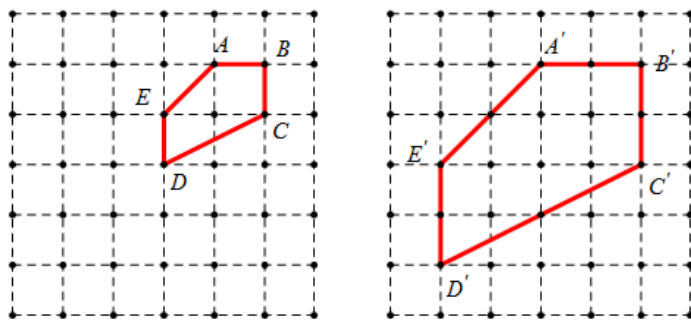


2. 相似多边形

思考：我们学过全等，知道如果两个图形全等，那么这个两个全等图形的对应的边、对应的角，甚至周长、面积都是 相等 的．那么如果两个图形是相似的，他们的对应边和对应角有什么关系呢？



再看看图中两个相似的五边形，是否和上图观察的得到的结果一样？



！总结：两个 边数 相同 的多边形，如果它们的 角 分别 相等，边 成比例，那么这两个多边形叫做 **相似多边形**．相似多边形 对应边 的比叫做 相似比．

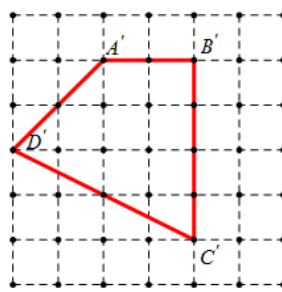
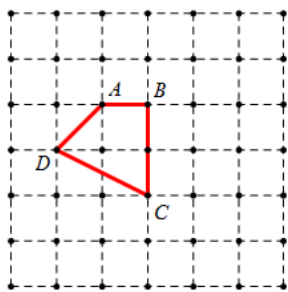
相似多边形的性质：相似多边形的 对应角 相等，对应边 成比例．

相似多边形的判定：如果两个多边形 对应边 成比例、对应角 相等，那么这两个多边形相似．

例如，下图中两个大小不同的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D', \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$$

因此，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 相似．



🔔 举个“栗”子

栗子1

1. 下列各组图形相似的是（ ）.



【备注】 相似图形定义：形状相同的图形

【答案】 B

【解析】 A、形状不同，大小不同，不符合相似定义，故错误．

B、形状相同，但大小不同，符合相似定义，故正确．

C、形状不同，不符合相似定义，故错误．

D、形状不同，不符合相似定义，故错误．

【标注】 【知识点】相似形

栗子2

2. 下列命题中正确的是（ ）.

- A. 若两个多边形相似，则对应边的比相等
- B. 若两个多边形相似，则对应角的比等于对应边的比
- C. 若两个多边形的对应角相等，则这两个多边形相似
- D. 若两个多边形的对应边的比相等，则这两个多边形相似

【备注】考察相似多边形的性质：对应角相等，对应边成比例

【答案】A

【解析】A 选项：相似多边形对应边比都等于相似

比，正确；

B 选项：对应角相等，对应边比等于相似

比，错误；

C 选项：形状相同的多边形是相似多边形，

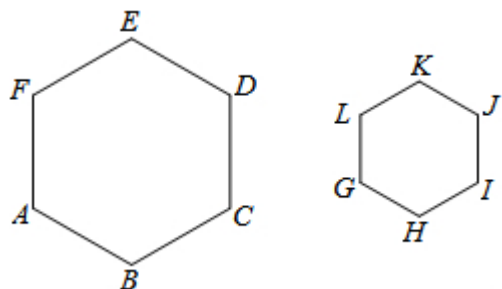
错误；

D 选项：形状相同的多边形是相似多边形，错误。

故选 A。

【标注】【知识点】相似形

3. 如图，六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ，则下列结论正确的是（ ）。



A. $\angle B = 2\angle K$

B. 六边形 $ABCDEF$ 的周长=六边形 $GHIJKL$ 的周长

C. $BC = 2HI$

D. $S_{\text{六边形}ABCDEF} = 2S_{\text{六边形}GHIJKL}$

【备注】相似多边形性质的利用：对应角相等，对应边成比例，周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方

【答案】C

【解析】A. $\because$ 六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ， $\therefore \angle E = \angle K$ ，故本选项错误。

B. $\because$ 六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ， $\therefore$

$S_{\text{六边形}ABCDEF} = 4S_{\text{六边形}GHIJKL}$ ，故本选项错误。

C. $\because$ 六边形 $ABCDEF \sim$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ， $\therefore BC = 2HI$ ，故本选项正确。

D. $\because$ 六边形 $\sim$ 六边形 $ABCDEF$ 六边形 $GHIJKL$ ，相似比为 $2:1$ ， $\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 的周长=六边形 $GHIJKL$ 的周长 $\times 2$ ，故本选项错误。

【标注】【知识点】相似形

【能力】推理论证能力

4. 下列说法正确的是（ ）。

A. 任意两个正方形一定是相似的

B. 任意两个矩形一定是相似的

C. 任意两个菱形一定是相似的

D. 任意两个等腰梯形一定是相似的

【备注】考察相似多边形的判定：只有正方形满足对应角一定相等，对应边一定成比例

【答案】A

【解析】A. 任意两个正方形，对应边成比例，对应角都是直角，一定相等，所以一定相似，故本选项正确；

B. 任意两个矩形，对应边不一定成比例，对应角都是直角，一定相等，所以不一定相似，故本选项错误；

C. 任意两个菱形，对应边成比例，但对应角不一定相等，所以不一定相似，故本选项错误；

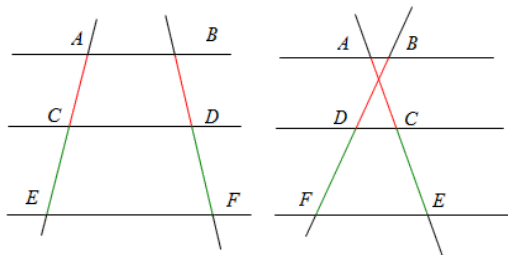
D. 任意两个等腰梯形，对应边不一定成比例，对应角不一定相等，所以不一定相似，故本选项错误。

故选A。

【标注】【知识点】相似形

二、平行线分线段成比例

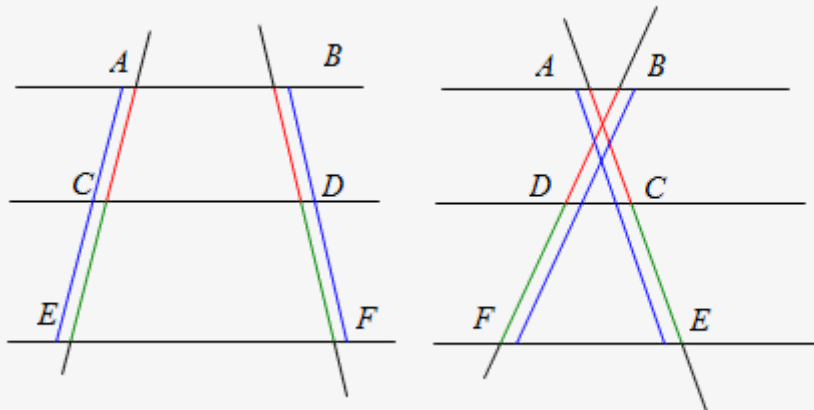
平行线分线段成比例基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。



如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，则 $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ ， $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$ ， $\frac{CE}{AE} = \frac{DF}{BE}$

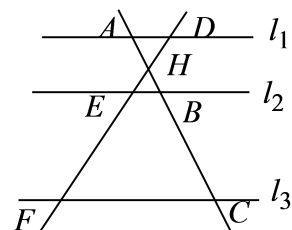
【备注】记忆小方法：

若将 AC 、 BD 称为上， CE 、 DF 称为下， AE 、 BF 称为全，上述比例式可以形象地表示为上下上下，上全上全，下全下全上下=上下，上全=上全，下全=下全，下上下上下上=下上；建议教师在讲解时用不同颜色的弧线标示这些线段、便于学生观察并加深印象。



栗子3

5. 如图，直线 $l_1 // l_2 // l_3$ ，直线 AC 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C ，直线 DF 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F ， AC 与 DF 相交于点 H ，且 $AH = 2, HB = 1, BC = 5$ ，则 $\frac{DE}{EF}$ 的值为_____。



【备注】根据平行线所截线段成比例可得： $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】 $\because AH = 2, HB = 1,$
 $\therefore AB = AH + BH = 3,$
 $\because l_1 // l_2 // l_3,$
 $\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}.$
 故答案为： $\frac{3}{5}.$

【标注】【知识点】比例的综合应用

三、相似三角形的判定

1. 相似三角形定义

相似三角形的定义：形状 相同 的两个三角形叫做相似三角形（即三个角分别 相等，三条边 成比例），相似三角形对应边的比叫做 相似比。相似用符号 “ $\sim$ ” 表示，读作 “相似于”。

！注意：①与表示两个三角形全等类似，表示两个三角形相似时，经常把表示对应角顶点的字母写在对应位置上。

②当 $k=1$ 时，两个三角形 全等，所以全等是特殊的相似，但相似 不一定 全等。

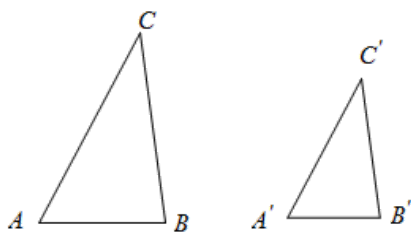
如右图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A = \angle A'$ ，

$\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k,$$

那么就说明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，即

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 k

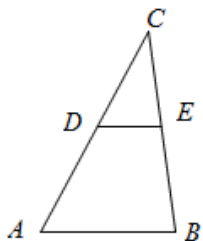


【备注】注意寻找好对应边与对应角（有些题中对应边或对应角不是很好寻找，可利用对应边所对的角一定是对应角；对应角所对的边一定是对应边寻找）

2. 相似三角形的判定

🔗 平行出相似

思考一：如下图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel AB$ ，且 DE 分别交 AC ， BC 于点 D 、 E ，那么 $\triangle CDE$ 与 $\triangle CAB$ 有什么关系？试着证明一下。



【备注】“**A**”字模型思路点拨：

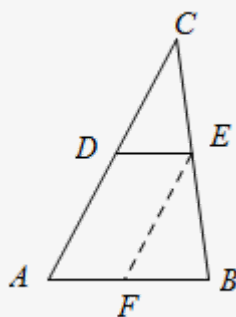
1、要证明两个三角形相似，可以通过相似的定义进行证明，即证明两个三角形的对应角相等，对应边成比例。

2、根据学过的“平行线分线段成比例”的推论以及平行线的性质，可以得到

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}, \angle A = \angle CDE, \angle B = \angle CED, \angle C = \angle C.$$

3、需要我们证明的是 $\frac{DE}{AB}$ 的值和 $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ 的值相等。

4、因为 DE 和 BC 不在同一条直线上，无法应用平行线分线段成比例定理，于是可以考虑平移线段 DE 到线段 AB 上，再证明．如下图使得 $DE = AF$ ．



证明过程：

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle CAB$ 中， $\angle C = \angle C$ ，

$\therefore DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle A = \angle CDE$ ， $\angle B = \angle CED$ ．

$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ （平行线分线段成比例推论）．

过点 E 作 $EF \parallel AC$ 交 AB 于点 F ，

已知 $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFED$ 是平行四边形，

$\therefore DE = AF$ ．

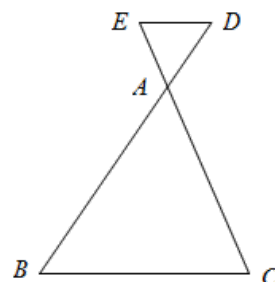
$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AB}$ （平行线分线段成比例， $\frac{\text{下}}{\text{全}} = \frac{\text{下}}{\text{全}}$ ）

$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$ ，

$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}$ ，

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAB$ ．

思考二：如下图， $DE \parallel BC$ ， $\triangle ADE$ 和 $\triangle ACB$ 相似吗？试着证明一下．



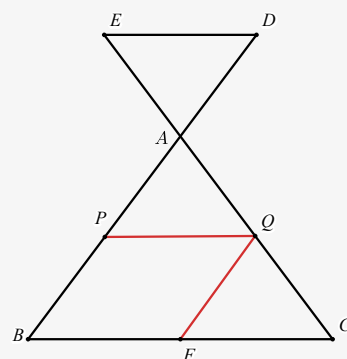
【备注】“8”字模型思路点拨：

如下图，作 $PQ \parallel DE$ ， $AQ = AE$ ，构造 $\triangle ADE \cong \triangle APQ$ ．

过点 Q 作 $QF \parallel AB$ ，易得四边形 $BPQF$ 为平行四边形，

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ，

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{AQ}{AC} &= \frac{AP}{AB}, \\
 \text{又} \because \frac{AQ}{AC} &= \frac{BF}{BC}, PQ = BC \\
 \therefore \frac{PQ}{BC} &= \frac{AQ}{AC}, \\
 \therefore \frac{PQ}{BC} &= \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB}, \angle E = \angle C, \angle D = \angle B, \\
 \angle EAD &= \angle CAB \\
 \therefore \triangle EAD &= \triangle CAB
 \end{aligned}$$

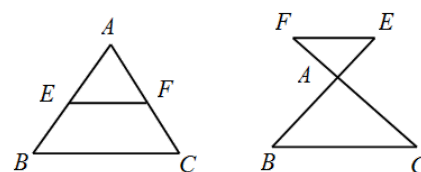


！通过思考部分的证明，得到了证明两个三角形相似的第一个判定定理(预备定理)：

平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。

例如：

已知 $BC \parallel EF$ ，则 $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ 。



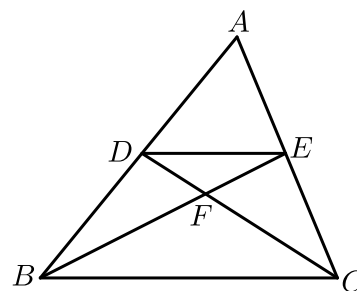
【备注】该判定可总结为：平行出相似

！注意：

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}.$$

栗子4

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点， $DE \parallel BC$ ， BE 与 CD 相交于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）。



- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ B. $\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EC}$ C. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ D. $\frac{DF}{BF} = \frac{EF}{FC}$

【备注】由平行出相似可得： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 、 $\triangle DBF \sim \triangle ECF$

【答案】A

【解析】A 选项：

$$\begin{aligned} &\because DE \parallel BC, \\ &\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \end{aligned}$$

故正确.

$$\text{B 选项: } \because DE \parallel BC,$$

$$\begin{aligned} &\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF, \\ &\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{EF}{FB}, \end{aligned}$$

故错误.

$$\text{C 选项: } \because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

故错误.

$$\text{D 选项: } \because DE \parallel BC$$

,

$$\begin{aligned} &\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF, \\ &\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{EF}{BF}, \end{aligned}$$

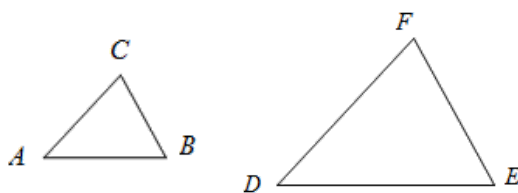
故错误.

故选 A.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

三边对应成比例

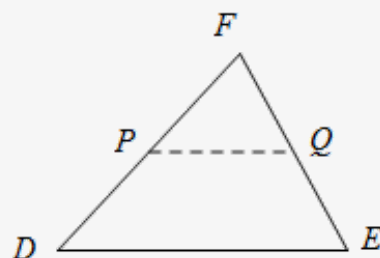
思考: $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{EF} = \frac{AC}{DF}$, 求证 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



【备注】证明:

在线段 DF (或它的延长线) 上截取 $FP = CA$, 过点 P 作 $PQ \parallel DE$, 交 EF 于点 Q . 由预备定理可知, $\triangle FPQ \sim \triangle FDE$.

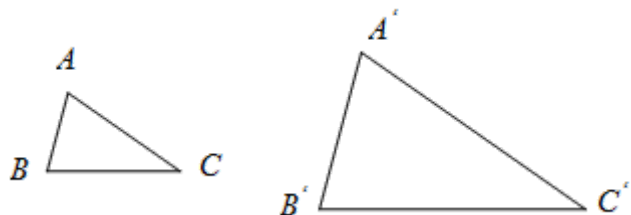
$$\begin{aligned} &\therefore \frac{PQ}{DE} = \frac{FQ}{EF} = \frac{FP}{DF}, \\ &\text{又} \because \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{EF} = \frac{AC}{DF}, FP = CA, \\ &\therefore PQ = AB, FQ = CB, \\ &\therefore \triangle FPQ \cong \triangle CAB, \end{aligned}$$



$$\therefore \triangle CAB \sim \triangle FDE$$

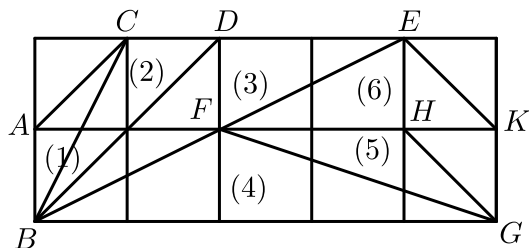
! 通过上述证明可得相似三角形的判定定理：三边对应成比例的两个三角形相似。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子5

7. 在正方形网格上有6个三角形：(1) $\triangle ABC$ ，(2) $\triangle BCD$ ，(3) $\triangle BDE$ ，(4) $\triangle BFG$ ，(5) $\triangle FGH$ ，(6) $\triangle EKF$ ，其中(2)到(6)中与(1)相似的三角形的个数是 _____。



【备注】分别求出每个三角形的边长，计算是否能够与(1)中的三角形形成三边成比例

【答案】3

【解析】设1个小正方形的边长为1，则 $\triangle ABC$ 的各边长分别为1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ，

$\triangle BCD$ 的各边长分别为1, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ ，

$\triangle BDE$ 的各边长分别为2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$ ，为 $\triangle ABC$ 各边长的2倍，

$\triangle BFG$ 的各边长分别为 $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, 5，为 $\triangle ABC$ 各边长的 $\sqrt{5}$ 倍，

$\triangle FGH$ 的各边长分别为 $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{10}$ ，为 $\triangle ABC$ 各边长的 $\sqrt{2}$ 倍，

$\triangle EKF$ 的各边长分别为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, 3，

根据三组对应边的比相等的两个三角形相似得到与三角形(1)相似的是(3)(4)(5)。

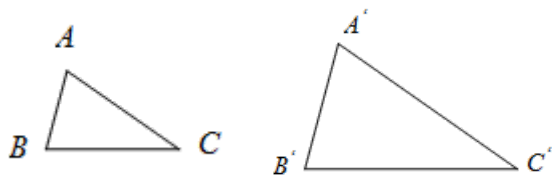
【标注】【知识点】网格中的三角形相似

两边成比例且夹角相等

同理，类似于判定三角形全等的 SAS 方法，也可利用两边成比例和夹角相等来判定两个三角形相似。

！相似三角形的判定定理：两边成比例 且 夹角相等 的两个三角形相似。

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} , \angle A = \angle A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

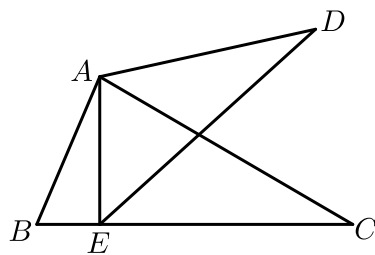


【备注】注意必须满足夹角相等

栗子6

8. 如图，已知： $\angle BAC = \angle EAD$ ， $AB = 20.4$ ， $AC = 48$ ， $AE = 17$ ， $AD = 40$ 。

求证： $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。



【备注】根据两边成比例且夹角相等证明两个三角形相似；对应边成比例直接用线段长度求解即可

【答案】证明见解析。

【解析】 $\because AB = 20.4$ ， $AC = 48$ ， $AE = 17$ ， $AD = 40$ 。

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{20.4}{17} = 1.2, \quad \frac{AC}{AD} = \frac{48}{40} = 1.2,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\because \angle BAC = \angle EAD,$$

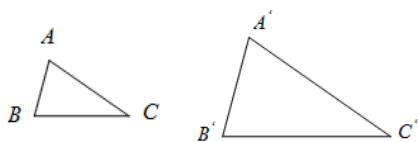
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

两角分别相等

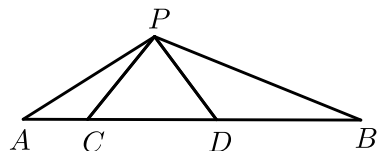
！相似三角形的判定定理：两角分别相等的两个三角形相似。

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



栗子7

9. 如图，点C、D在线段AB上，且 $\triangle PCD$ 是等边三角形， $\angle APB = 120^\circ$ 。



(1) 求证： $\triangle ACP \sim \triangle PDB$ 。

【备注】由 $\triangle PCD$ 为等边三角形推出 $\angle PCA = \angle PDB = 60^\circ$ ；
 $\therefore \angle APC + \angle BPD = 60^\circ$ ， $\angle APC + \angle A = 60^\circ$ ，
 可得 $\angle A = \angle BPD$

【答案】(1) 证明见解析。

【解析】(1) $\because \triangle PCD$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle PCD = \angle PDC = \angle CPD = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACP = \angle PDB = 120^\circ$ ，
 $\because \angle APB = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle APC + \angle BPD = 60^\circ$ ，
 $\because \angle CAP + \angle APC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BPD = \angle CAP$ ，
 $\therefore \triangle ACP \sim \triangle PDB$ 。

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

！相似三角形判定总结：

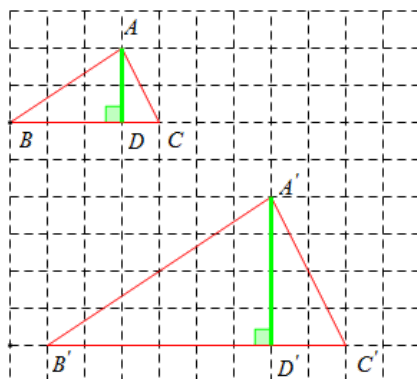
相似三角形判定

- 1、_____于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似。（即_____出相似）
- 2、_____对应成比例的两个三角形相似。
- 3、_____成比例且_____相等的两个三角形相似。
- 4、_____分别相等的两个三角形相似。

四、相似三角形的性质

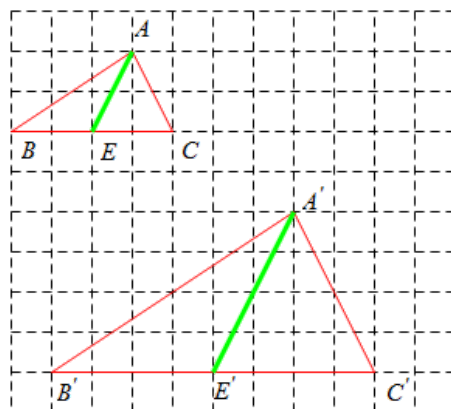
思考：

如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形高的比值 $\frac{AD}{A'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【备注】从图中可以直接看出来两条线段的比值为 $\frac{1}{2}$ 。

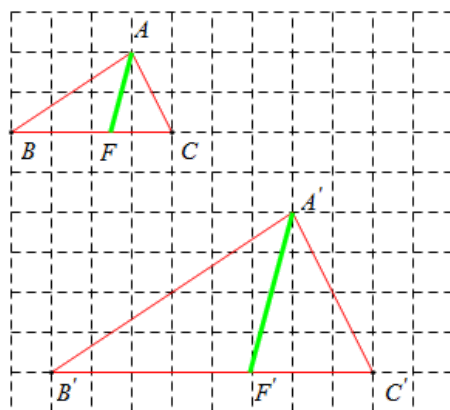
如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形中线的比值 $\frac{AE}{A'E'} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【备注】 $\frac{AE}{A'E'} = \frac{1}{2}$ ，这个比值直接观察不好观察出来，可以利用网格中给出的线段长，通过勾

股定理计算出 AE 、 $A'E'$ 的长度，再作比．

如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形角分线的比值 $\frac{AF}{A'F'} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【备注】 $\frac{AF}{A'F'} = \frac{1}{2}$ ，判定角平分线之间的关系，不能像上面判定高线和中线那样通过观察或勾股定理确定两条线段的比值关系．这里就可以引导学生思考一下除了观察和勾股定理计算，他还有没有其他办法解决求线段比值关系的问题．

证明过程如下：

已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为1:2，

$\therefore \angle B = \angle B', \angle BAC = \angle B'A'C', AB:A'B' = 1:2,$

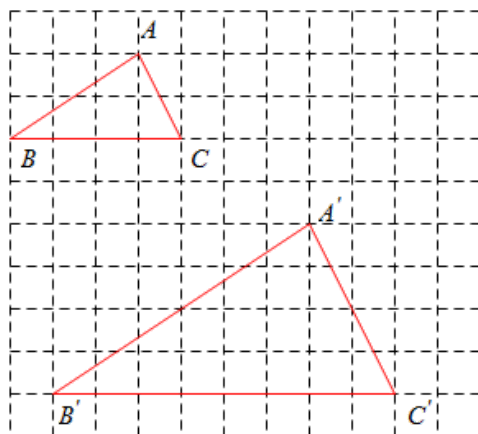
又 $\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线， $A'F'$ 是 $\angle B'A'C'$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAF = \angle B'A'F',$

$\therefore \triangle BAF \sim \triangle B'A'F'$ 相似比为1:2．

$\therefore AF:A'F' = 1:2$ ．

如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，则图中两个三角形的周长的比值是_____．

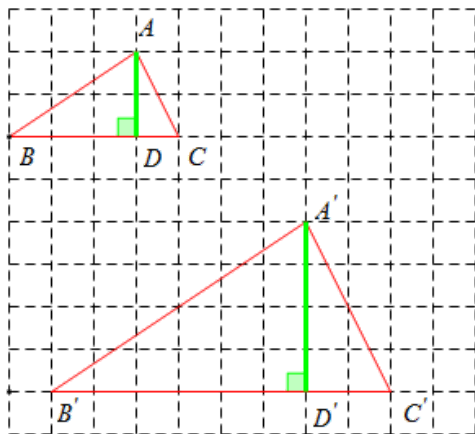


【备注】

$$\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}A'B' + \frac{1}{2}A'C' + \frac{1}{2}B'C'}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{1}{2}$$

根据前面的探究，我们也可以推出相似三角形的面积比与相似比的关系。

如图， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，则有



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD}{\frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'} = k^2.$$

！相似三角形性质总结：

相似三角形的性质

相似三角形的_____相等，_____之比相等，都等于_____。

相似三角形对应_____的比、对应_____的比、对应_____的比、_____之比都等于相似比。

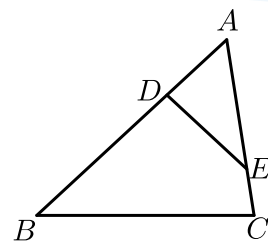
相似三角形面积的比等于相似比的_____。

【备注】相似三角形的性质：

- 1、相似三角形的对应角相等，对应边之比相等，都等于相似比
- 2、相似三角形对应中线的比、对应高线的比、对应角平分线的比以及周长之比都等于相似比
- 3、相似三角形面积的比等于相似比的平方

栗子8

10. 如图， $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ， $\angle ADE = 80^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle C$ 等于（ ）。



A. 40°

B. 60°

C. 80°

D. 100°

【备注】考察相似三角形的性质：相似三角形对应角相等

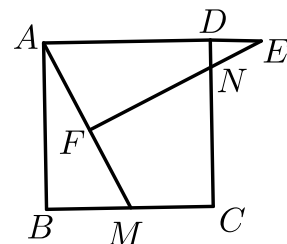
【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC \sim \triangle AED$,
 $\therefore \angle C = \angle ADE = 80^\circ$,
 故选C .

【标注】【知识点】相似三角形的性质

栗子9

11. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， F 是 AM 的中点， $EF \perp AM$ ，垂足为 F ，交 AD 的延长线于点 E ，交 DC 于点 N .



(1) 求证： $\triangle ABM \sim \triangle EFA$.

(2) 若 $AB = 12$ ， $BM = 5$ ，求 DE 的长 .

【备注】(1)考察相似三角形的判定：利用两角相等证明相似
 (2)考察相似三角形的性质：相似三角形对应边成比例

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 4.9 .

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB = AD$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle AMB = \angle EAF,$$

$$\text{又} \because EF \perp AM,$$

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle AFE,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle EFA.$$

$$(2) \because \angle B = 90^\circ, AB = 12, BM = 5,$$

$$\therefore AM = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13, AD = 12,$$

$$\because F \text{ 是 } AM \text{ 的中点},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2} AM = 6.5,$$

$$\because \triangle ABM \sim \triangle EFA,$$

$$\therefore \frac{BM}{AF} = \frac{AM}{AE},$$

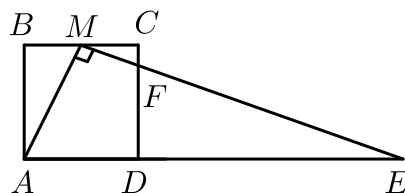
$$\text{即 } \frac{5}{6.5} = \frac{13}{AE},$$

$$\therefore AE = 16.9,$$

$$\therefore DE = AE - AD = 4.9.$$

【标注】【知识点】相似三角形的判定-两角对应相等

12. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 CD 于点 F ，交 AD 的延长线于点 E ，若 $AB = 4$ ， $BM = 2$ ，则 $\triangle DEF$ 的面积为（ ）。



A. 9

B. 8

C. 15

D. 14.5

【备注】从问题入手分析，想求 $\triangle DEF$ 的面积，即求 DF 、 DE 的长；利用两组相似求出长度即可

【答案】A

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 4, \angle B = \angle BAD = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\because BM = 2,$$

$$\therefore AM = 2\sqrt{5},$$

$$\because \angle BAM + \angle MAE = 90^\circ, \angle E + \angle MAE = 90^\circ,$$

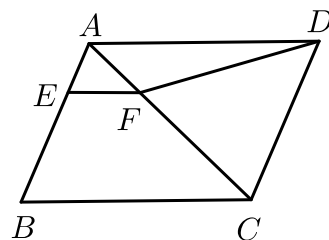
$$\therefore \angle BAM = \angle E,$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle B = \angle AME = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle ABM \sim \triangle EMA, \\
&\therefore \frac{BM}{AM} = \frac{AM}{AE}, \\
&\therefore AE = \frac{AM^2}{BM} = 10, \\
&\therefore DE = AE - AD = 6, \\
&\therefore BM = 2, \\
&\therefore CM = 2, \\
&\therefore \triangle DEF \sim \triangle CMF, \\
&\therefore \frac{CF}{DF} = \frac{MC}{DE} = \frac{1}{3}, \\
&\therefore DF = 3, \\
&\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} DE \times DF = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9. \\
&\text{故选：A.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

栗子10

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC 是一条对角线， $EF \parallel BC$ ，且 EF 与 AB 相交于点 E ，与 AC 相交于点 F ， $3AE = 2EB$ ，连接 DF 。若 $S_{\triangle AEF} = 1$ ，则 $S_{\triangle ADF}$ 的值为 _____。



【备注】此题考察相似三角形性质：两个相似三角形面积比等于相似比的平方；

由平行可得 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ ，相似比为 $2 : 5$ ，

$$\therefore S_{\triangle AEF} : S_{\triangle ABC} = 4 : 25, \text{ 即 } S_{\triangle ABC} = \frac{25}{4},$$

$\triangle AFD$ 与 $\triangle ADC$ 为等高模型，面积比等于底边之比，

$$S_{\triangle AFD} : S_{\triangle ADC} = AF : AC = 2 : 5$$

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because 3AE = 2EB$ ，

$\therefore$ 可设 $AE = 2a$ 、 $BE = 3a$ ，

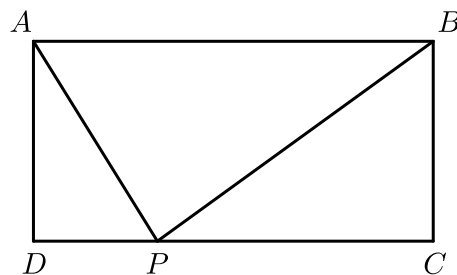
$\because EF \parallel BC$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC, \\
&\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2a+3a}\right)^2 = \frac{4}{25}, \\
&\therefore S_{\triangle AEF} = 1, \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{25}{4}, \\
&\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形}, \\
&\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} = \frac{25}{4}, \\
&\therefore EF \parallel BC, \\
&\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}, \\
&\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{AF}{CF} = \frac{2}{3}, \\
&\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ADC} = \frac{2}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似A字型

栗子11

14. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = 2$ ， $AB = 5$ ， P 为 CD 边上的动点，当 $\triangle ADP$ 与 $\triangle BCP$ 相似时， $DP = \underline{\quad\quad}$ 。



【备注】此题考查相似三角形存在性；

$$\therefore \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore AP$ 与 BP 一定是对应边，

因此讨论 AD 的对应边为 PC 或 BC ， DP 的对应边为 BC 或 PC 即可

【答案】1或4或2.5

【解析】①当 $\triangle APD \sim \triangle PBC$ 时， $\frac{AD}{PC} = \frac{PD}{BC}$ ，

$$\text{即 } \frac{2}{5-PD} = \frac{PD}{2},$$

解得： $PD = 1$ ，或 $PD = 4$ 。

$$\text{②当 } \triangle PAD \sim \triangle PBC \text{ 时，} \frac{AD}{BC} = \frac{PD}{PC}, \text{ 即 } \frac{2}{2} = \frac{PD}{5-PD},$$

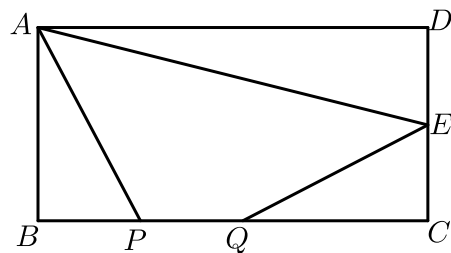
解得： $DP = 2.5$.

综上所述， DP 的长度是1或4或2.5 .

【标注】【知识点】相似三角形中的动点问题

独步天下1

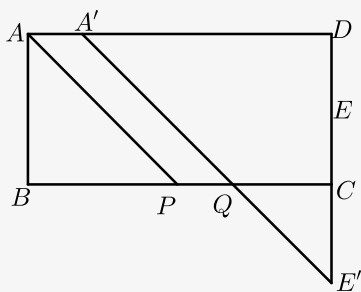
15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， E 为 CD 的中点，若 P 、 Q 为 BC 边上的两个动点，且 $PQ = 2$ ，若想使得四边形 $APQE$ 的周长最小，则 BP 的长度应为 _____ .



【备注】与定长线段运动问题进行综合；先作出满足周长最小值的 P 、 Q 两点，想求 BP 的长，即可求 CQ 的长，然后利用相似三角形求 CQ

【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】在 AD 上截取 $AA' = 2$ ，



过点 E 关于直线 BC 的对称点 E' ，

连接 $A'E'$ 交 BC 于点 Q ，

截取 $PQ = 2$ ， P ， Q 两点即为所求 .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ，

$\therefore CD = AB = 4$ ，

$\therefore BC \parallel AD$ ，

$BC = AD = 7$ ， $A'D = AD - AA' = 5$ ，

$\because E$ 为 CD 中点，

$\therefore CE = DE = 2$ ，

$\therefore CE' = 2$ ，

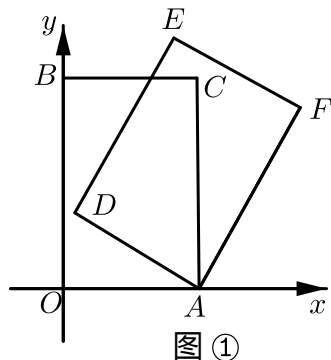
$$\begin{aligned}
&\because CQ \parallel A'D, \\
&\angle CE'Q \sim \angle DE'A', \\
&\therefore \triangle CE'Q \sim \triangle DE'A', \\
&\therefore \frac{CQ}{A'D} = \frac{CE'}{E'D}, \\
&\therefore \frac{A'D}{CQ} = \frac{E'D}{CE'}, \\
&\frac{CQ}{5} = \frac{2}{6}, \\
&CQ = \frac{5}{3}, \\
&\therefore BP = BC - PQ - CQ = 7 - 2 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

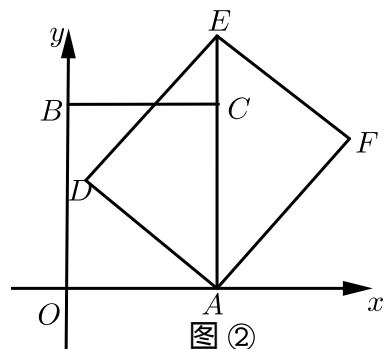
独步天下2

16. 在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(6,0)$ ，点 $B(0,8)$ 以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F ，记旋转角为 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 。

(1) 如图①，当 $\alpha = 30^\circ$ 时，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，当点 E 落在 AC 的延长线上时，求点 D 的坐标。



(3) 当点 D 落在线段 OC 上时，求点 E 的坐标 (直接写出结果即可)。

【备注】与一线三垂直模型综合

【答案】(1) $(6 - 3\sqrt{3}, 3)$ 。

$$(2) \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

$$(3) (12, 8).$$

【解析】(1) $\alpha = 30^\circ$, 故 $\angle DAO = 30^\circ$,

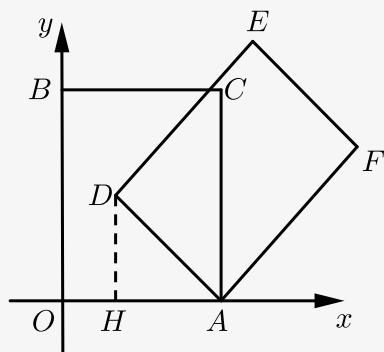
过 D 作 $DH \perp OA$ 于 H ,

$$\text{则 } DH = AD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AD = 3,$$

$$AH = AD \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore OH = OA - AH = 6 - 3\sqrt{3},$$

$$\text{故 } D(6 - 3\sqrt{3}, 3).$$



(2) 作 $DM \perp AC$ 于 M 点,

$$AD = OA = 6, OB = DE = 8,$$

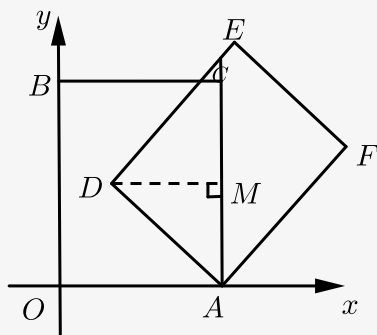
$$\text{则 } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\text{故 } DM = \frac{AD \cdot DE}{AE} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5},$$

$$AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \frac{18}{5},$$

$$x_D = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\text{故 } D \text{ 坐标为 } \left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

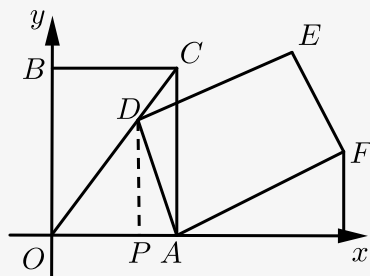


(3) 当点 D 落在 OC 上时, $OA = AD = 6$,

作 $DP \perp x$ 轴于 P 点, 作 $FQ \perp x$ 轴于 Q 点,

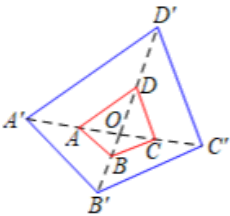
可知 $\triangle ODP \sim \triangle OCA$,

$$\begin{aligned}
 &\text{由(2)知 } OD = 2 \times \frac{18}{5} = \frac{36}{5}, \frac{OD}{OC} = \frac{OP}{OA} = \frac{DP}{AC}, \\
 &\quad \frac{\frac{36}{5}}{10} = \frac{OP}{6} = \frac{DP}{8}, \\
 &\text{解得: } OP = \frac{108}{25}, DP = \frac{144}{25}, \\
 &\therefore D\left(\frac{108}{25}, \frac{144}{25}\right), \\
 &\text{又 } \triangle DPA \sim \triangle AQF, \\
 &\quad \frac{DP}{AQ} = \frac{AP}{FQ} = \frac{AD}{AF}, \\
 &\quad \frac{\frac{144}{25}}{6 - \frac{108}{25}} = \frac{6}{FQ}, \\
 &\text{解得: } AQ = \frac{192}{25}, FQ = \frac{56}{25}, \\
 &\text{故 } F\left(\frac{342}{25}, \frac{56}{25}\right), \\
 &\therefore x_E = \frac{108}{25} + \frac{342}{25} - 6 = 12, \\
 &\quad y_E = \frac{144}{25} + \frac{56}{25} - 0 = 8, \\
 &\text{故 } E(12, 8).
 \end{aligned}$$



【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

五、位似图形

位似 	定义	两个多边形不仅 <u>相似</u>，而且对应顶点的连线 <u>相交于一点</u>，像这样的两个图形叫做位似图形．这点叫做 <u>位似中心</u>．这时我们说这两个图形关于这点位似．
	性质	1、对应点的连线都经过 <u>位似中心</u>． 2、位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于 <u>相似</u>． 3、不经过位似中线的对应线段 <u>平行</u> 或 <u>在同一直线上</u>．
	位似变换	以原点为位似中心的位似变换（位似比为k）其对应点的坐标关系可表示为：$P(x, y)$对应点为位似中心同侧 <u>$P_1(kx, ky)$</u>；$P(x, y)$对应点为位似中心异侧 <u>$P_1(-kx, -ky)$</u>．

【备注】 位似图形总结：① 位似图形都是相似的；

② 对应点的连线（或延长线）交于一点，这一点就是位似中心；

③ 对应边平行（或在同一条直线上）．

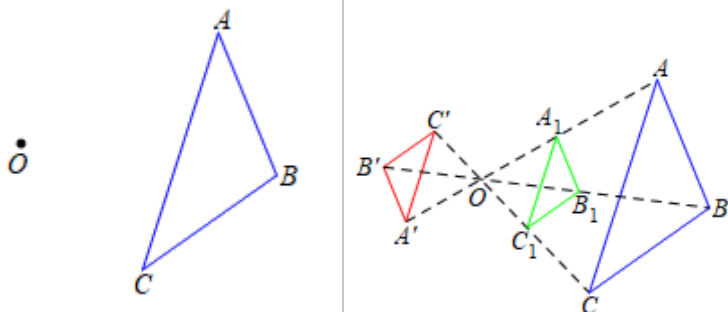
！ 注意：

位似图形是特殊的相似图形，位似图形中的一个图形中的两个顶点与位似中心构成的三角形与其对应的两个顶点与位似中心构成的三角形呈“A”字相似或“8”字相似．

位似作图：

利用位似变换可以把一个图形 放大或缩小，若位似比大于1，则通过位似变换把原图形放大；若位似比小于1，则通过位似变换把原图形缩小。

已知 $\triangle ABC$ ，画出一个三角形，与 $\triangle ABC$ 是位似图形，且位似比为2:5，点 O 为位似中心。



以一点为位似中心，将一个图形按照一定的相似比放大或缩小，有两种情况：

- ①当 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的同侧时，构建的是“A”字相似。
- ②当 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 在位似中心点 O 的异侧时，构建的是“8”字相似。

【备注】！注意：

位似作图首先要确定位似中心，再根据位似比作出原图形中的一些关键点的对应点，最后在对照原图形把这些点按一定的次序连接起来。

栗子12

17. 关于对位似图形的表述，下列命题正确的有（ ）。

- ①相似图形一定是位似图形，位似图形一定是相似图形；
- ②位似图形一定有位似中心；
- ③如果两个图形是相似图形，且每组对应点的连线所在的直线都经过同一个点，那么这两个图形是位似图形；
- ④位似图形上任意一组对应点 P ， P' 与位似中心 O 的距离满足 $OP = k \cdot OP'$ 。

A. ①②③④

B. ②③④

C. ②③

D. ②④

【备注】 位似图形的定义

【答案】 B

【解析】 ①位似图形一定是相似图形，但是相似图形不一定是位似图形，故错误；

②位似图形一定有位似中心，正确；

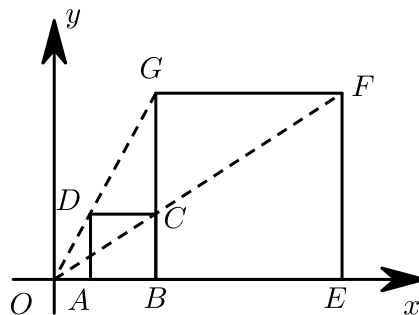
③如果两个图形是相似图形，且每组对应点的连线所在的直线都经过同一个点，那么这两个图形是位似图形，正确；

④位似图形上任意一组对应点 P ， P' 与位似中心 O 的距离满足 $OP = k \cdot OP'$ ，正确。故选B。

【标注】【知识点】位似图形的性质

栗子13

18. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比为 $\frac{1}{3}$ ，点 A ， B ， E 在 x 轴上，若正方形 $BEFG$ 的边长为6，则 C 点坐标为（ ）。



A. (3, 2)

B. (3, 1)

C. (2, 2)

D. (4, 2)

【备注】位似比等于相似比，位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于相似比

【答案】A

【解析】∵正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比为 $\frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BG} = \frac{1}{3},$$

$$\because BG = 6,$$

$$\therefore AD = BC = 2,$$

$$\therefore AD \parallel BG,$$

$$\therefore \triangle OAD \sim \triangle OBG,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{OA}{2 + OA} = \frac{1}{3},$$

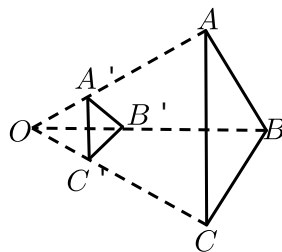
$$\text{解得：} OA = 1,$$

$$\therefore OB = 3,$$

$\therefore C$ 点坐标为(3,2) .

【标注】【知识点】位似图形的性质

19. 如图，以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小后得到 $\triangle A'B'C'$ ，已知 $OB = 3OB'$ ，则 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为（ ） .



A. 1 : 3

B. 1 : 4

C. 1 : 5

D. 1 : 9

【备注】考查位似的性质，位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于相似比；相似三角形的面积比等于相似比的平方

【答案】D

【解析】 $\because OB = 3OB'$,

$$\therefore \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{3} ,$$

$\therefore$ 以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小后得到 $\triangle A'B'C'$,

$\therefore \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{3} .$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9} .$$

【标注】【知识点】位似应用

栗子14

20. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(5,0)$ 、 $B(6,4)$ 、 $C(3,0)$ ，将 $\triangle ABC$ 以坐标原点 O 为位似中心，以位似比2 : 1进行缩小，则缩小后的点 B 所对应的点的坐标为 _____ .

【备注】将图形进行放大或缩小时注意进行分类讨论：按照图形的同侧或异侧进行求解

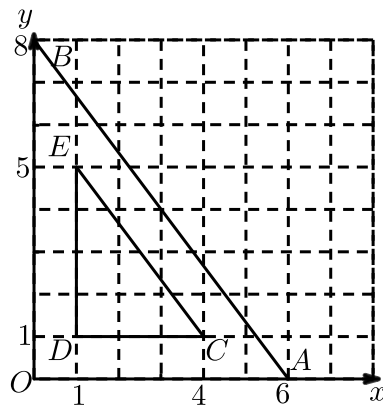
【答案】(3,2)或(-3,-2)

【解析】 $\because$ 点 B 的坐标为(6,4)，以原点为位似中心将 $\triangle ABC$ 缩小，位似比为2 : 1，

$\therefore$ 点 B 的对应点的坐标为(3,2)或(-3,-2)

栗子15

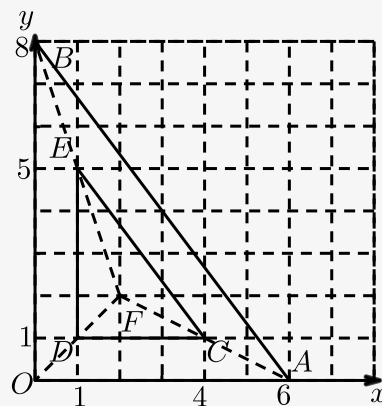
21. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0)$ ， $A(6,0)$ ， $B(0,8)$ ，以某点为位似中心，作出 $\triangle AOB$ 的位似 $\triangle CDE$ ，则位似中心的坐标为 _____ 。



【备注】对应点的连线（或延长线）交于一点，这一点就是位似中心

【答案】 $(2,2)$

【解析】如图所示，连接 OD 、 BE 、 AC ，并延长交于一点 F ，在坐标系中可观察到点 F 的坐标是 $(2,2)$ ，即位似中心的坐标是 $(2,2)$ 。



【标注】【知识点】确定位似中心